卒業論文

一様ネットワーク構造の並列処理システム設計法

東北大学工学部通信工学科 4 年

高原 英樹

目 次

第 1 章　序論 **1**
1.1　本研究の背景と目的 1
1.2　本論文の構成 2

第 2 章　ｎ次元アレーの定式化 **3**
2.1　準備 3
2.2　シストリックアレーの定式化 3

第 3 章　他のトポロジの定式化 **8**
3.1　はじめに 8
3.2　完全m分木に対する定式化 8
3.2.1　完全 2 分木に対する定式化 8
3.2.2　完全m分木に対する定式化 11
3.3　ハイパーキューブの定式化 14
3.4　ＣＣＣの定式化 17

第 4 章　まとめ **20**

謝辞 **21**

参考文献 **22**

第１章

序論

1.1　本研究の背景と目的

現在の汎用コンピュータのほとんどは１９４６年にペンシルバニア大学の Von Neumann によって作られた、いわゆるノイマン型コンピュータにその基礎をおいている。それからおよそ５０年の歳月が過ぎたが、その間のエレクトロニクス技術の大幅な進歩によりコンピュータはめざましい発展を遂げた。集積回路技術の進歩および半導体などの内部素子の高速化、高精度化のおかげでコンピュータのサイズは非常に小さくなりその処理速度は飛躍的に向上した。しかし、信号処理や画像処理、コンピュータグラフィクスなどの分野に於いては更なる高速化を必要としている。

これまでの高速化に対する答としては、例えばＣＰＵの性能向上やメモリ容量の増加、ＣＰＵ– メモリ間のバス幅の拡大などのシステム構成上の工夫であった。しかしながら、これらの高速化手法にも限界が見え始めている。そこで、ノイマン型コンピュータのように命令を始めから順番に行う逐次処理ではなくて、複数個のプロセッサで同時刻に複数個の計算を行うことによって計算時間を抑える並列処理と言うものが重要になってくる。

この並列処理を実現する並列処理アーキテクチャの１つにシストリックアレーがある。シストリックアレーは、１９７８年に Kung および Leiserson によって提案されたアレープロセッサの一種で、単純な処理を行うプロセッサ (セル) を規則正しく並べ、データをパイプライン的に送ることによって並列に計算を行うものである。また、シストリックアレーは通信が局所的であり、構造が一様で拡張性に優れているため、ＶＬＳＩ化が容易であるという長所を持っている。そのため、シストリックアレーを用いたシストリックアルゴリズムがいろいろ開発されている。

しかし、シストリックアレーを構築するには、設計が困難であり、動作解析も難しい。また、複数個の構成が考えられることも問題となる。そのためにシストリックアレーの自動設計法というものが考え出された [1]。ここには、 n 次元格子上にセルが配置されたシストリックアレー (以下このようなものを n 次元アレーと呼ぶ) に対するものしか書かれていない。

そこで、本研究では、 n 次元アレーだけでなく他のトポロジに対しても自動設計法を導き出すことを最大の目的とし、まず始めに n 次元アレーに対して成されている定式化というものを他のトポロジに対して行うことを当面の目的とする。

1.2　本論文の構成

本論文の構成は次の通りである。

第 1 章 序論として研究の背景と目的、構成を述べる。

第 2 章　n 次元シストリックアレーを数学的に定式化する。

第 3 章 他のトポロジに対する定式化を示す。

第 4 章 本研究のまとめと今後の課題を述べる。

第 2 章

n 次元アレーの定式化

2.1 準備

まず、いくつかの記号の約束をする。Zは整数の集合、$Z_p = \{0, 1, 2, \ldots, p-1\}$, $Z_+ = \{0, 1, 2, \ldots\}$ とする。Z_pの元の間の加算は、単に$+$とするが、$\bmod n$ の加算であるとする。乗算についても同様とする。(たとえば、$(n-1)+2 \in Z_n$であり、$n+1$ は 1 と同一視される。つまり、Z_n は$\bmod n$ 加算の有限可換群である。) さらに、$B = Z_2 = \{0, 1\}$ とおく (ブール値集合、$+$は排他的論理和$\oplus$に一致する)。実数 x について $\lfloor x \rfloor$ は x を越えない最も大きい整数を表し、$\lceil x \rceil$ は x を越える最も小さい整数を表す。

集合 D_1, D_2に対して、D_1から D_2への全域写像 $d : D_1 \to D_2$ の集合を $[D_1 \to D_2]$ と表し、部分写像の集合を $[D_1 \mapsto D_2]$ と表す。D_1が有限順序集合であるとき、$|D_1| = n$ (元の数) として、$[D_1 \to D_2]$ を n 次元の直積空間 D_2^nとも同一視する。つまり、$D_1 = \{i_1, i_2, \ldots, i_n\}$ であるとき、$d \in [D_1 \to D_2]$ は $d =< d(i_1), d(i_2), \ldots, d(i_n) >$ともみなし、この右辺を $< d(i) | i \in D_1 >$とも記す。

2.2 シストリックアレーの定式化

シストリックアレーは次ページのように定式化できる。

定義 1 シストリックアレーは、セル機能 F、セル空間 G、セル間結線 W、配置領域 Rの 4 項組 $< F, G, W, R >$である。それぞれの定義と意味は次のようである。

(1) セル関数

$F =< P_{in}, P_{out}, D, f >$

P_{in} :入力ポート集合 (有限順序集合)

$|P_{in}| = n$

P_{out} :出力ポート集合 (有限順序集合)

$|P_{out}| = m$

D :データの集合 (特別な元 "⊥:静止データ" を含む)

f :セル関数集合

$f : P_{out} \to [[P_{in} \to D] \to D]$

すなわち $f =< f_1, f_2, \ldots, f_a, \ldots, f_m >$ は $f_a : [P_{in} \to D] \to D$なる写像の組で、$f_a$は入力データに対して出力ポート a の値を決める関数である。

(2) セル空間

G は Z-加群で、セル機能を配置する空間の座標の集合である。

(3) セル間結線

$W =< u, N >$

u :ポート間結線写像　$P_{in} \to P_{out}$

N :近傍写像　$P_{in} \to G$

各セル α の入力ポート i をセル$\alpha - N(i)$ の出力ポート $u(i)$ に接続することを意味する。

(4) 配置領域

$R \subseteq G$ は、実際にセル機能を置くセル座標の集合で、アレー領域とも呼ぶ。

ここで、P_{in}の元を i, jで、P_{out}の元を a, b などで表す。また、セル座標をα, βなどで表す。

この定式化の例を 図 2.1に示す。

各セルの入出力ポートでその接続先がアレー領域から出てしまうものをアレー入力・出力ポート集合として次のように定める。

$$PA_{in} = \{(i,\alpha)|\alpha \in R, \alpha - N(i) \notin R\}$$
$$PA_{out} = \{(a,\alpha)|\alpha \in R, \exists i \in u^{-1}(a); \alpha + N(i) \notin R\}$$

また、連結用入力ポート集合を次のように定める。

$$\begin{aligned} PA_{cin} &= \{(a,\beta)|\exists i \in u^{-1}(a), (i,\beta + N(i)) \in PA_{in}\} \\ &= \{(u(i),\alpha - N(i))|(i,\alpha) \in PA_{in}\} \end{aligned}$$

シストリックアレー全体の動作は、各セルの入出力ポート上のデータの変化であるとみなせる。すなわち、時刻 t でのセル入・出力様相を $y^t \in [P_{in} \times G \to D], x^t \in [P_{out} \times G \to D]$ とし、入・出力データ流、連結用入力データ流をそれぞれ $d^t_{in} \in [PA_{in} \to D], d^t_{out} \in [PA_{out} \to D], d^t_{cin} \in [PA_{cin} \to D]$ として、次のような式でシストリックアレーの動作が決まる。

$$y^t(i,\alpha) = \begin{cases} d^{t-1}_{in}(i,\alpha) & [(i,\alpha) \in PA_{in}] \\ x^{t-1}(u(i),\alpha - N(i)) & [(i,\alpha) \notin PA_{in}] \end{cases}$$

$$x^t(a,\alpha) = f_a(< y^t(i,\alpha)|i \in P_{in} >)$$

$$d^t_{out}(a,\alpha) = x^t(a,\alpha) \qquad [(a,\alpha) \in PA_{out}]$$

$$d^t_{in}(i,\alpha) = d^t_{cin}(u(i),\alpha - N(i))$$

シストリックアレーの機能は上の動作により定まる連結用入力データ流 d_{cin}から出力データ流 d_{out}への対応とみなせる。すると、シストリックアレーの動作は次ページのループプログラムで記述できる。

for t=1 to M

for $\alpha \in R$

for $a \in P_{out}$

$$x^t(a,\alpha) = f_a(< x^{t-1}(u(i), \alpha - N(i)) | i \in P_{in} >)$$

但し、$\alpha - N(i) \notin R$ の時、

$$x^{t-1}(u(i), \alpha - N(i)) = d_{cin}^{t-1}(u(i), \alpha - N(i))$$

P_{in} ={1,2,3}　　$G=Z^2$　(Z:整数の集合)

P_{out} ={a,b,c}　　u(1)=a　　N(1)=(-1,0)

D:the set of number　　u(2)=b　　N(2)=(0,-1)

$f_a(d_1,d_2,d_3)=d_1$　　u(3)=c　　N(3)=(1,1)

$f_b(d_1,d_2,d_3)=d_2$　　R={1,2,3}×{1,2,3}

$f_c(d_1,d_2,d_3)=d_1 * d_2 + d_3$

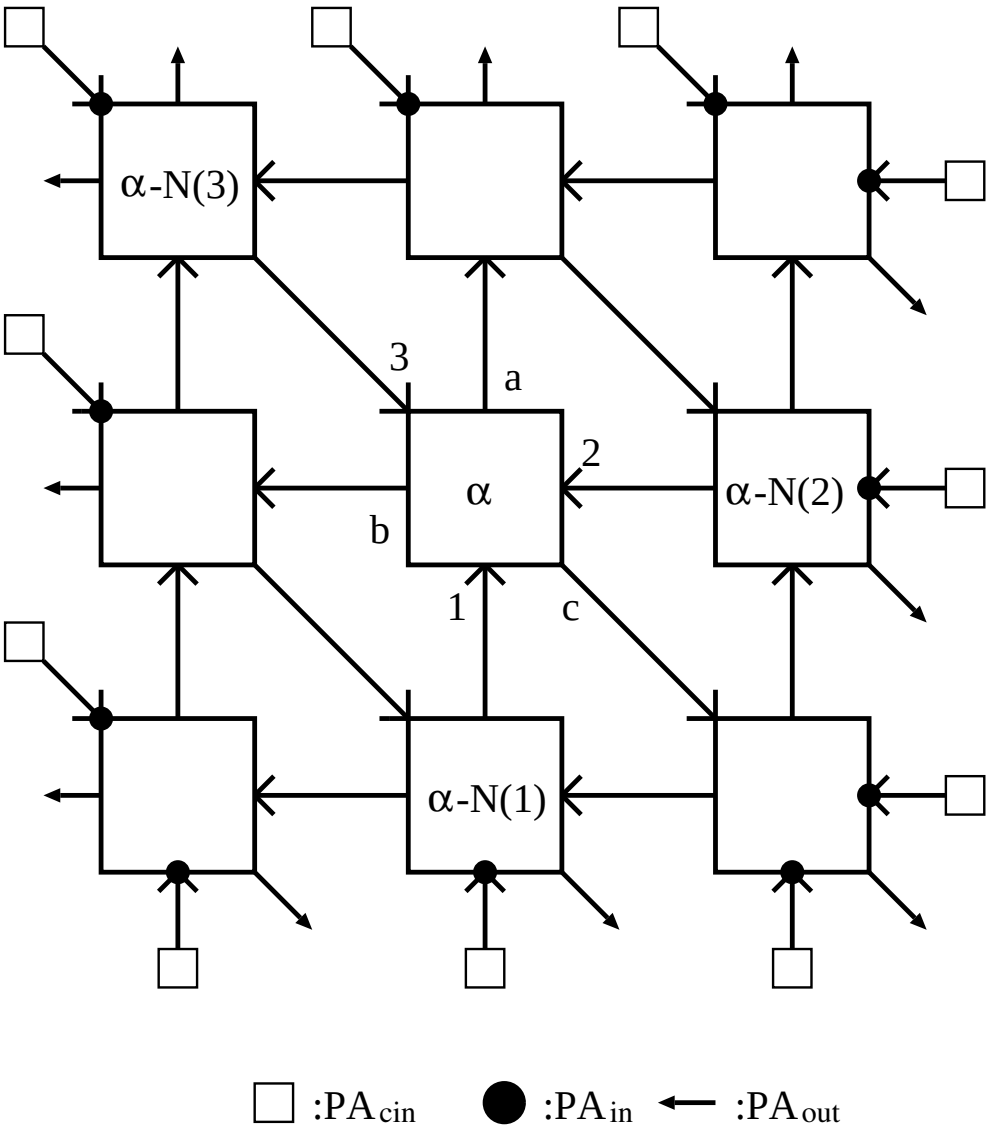


図 2.1: シストリックアレーの記述例

第 3 章

他のトポロジの定式化

3.1 はじめに

第 2 章で示した定式化と言うものは、主に n 次元アレーに対するものであるが、セル空間 G を $Z-$加群とすることにより、n 次元アレーだけでなく $Z_p(p > 1,\ 1$ 次元巡回型)、$Z_p \times Z_q(p, q > 1$、トーラス面)、$Z_p \times Z$ (円柱面) なども想定している。

しかし、その他のトポロジに対しては定式化というものがされていない。そこで、この章では完全m分木、ハイパーキューブ、ＣＣＣ (Cube-Connected Cycle) に対する定式化を考えてみる。

3.2 完全m分木に対する定式化

3.2.1 完全 2 分木に対する定式化

m分木を定式化する前に簡単のため、まず始めに 2 分木を定式化する。ここで考える 2 分木は葉以外の節はすべて 2 つの子を持つ完全 2 分木とする。この 2 分木に対して幅優先探索による番号付けをしていくと 図 3.1のようになる。

このように番号付けしていくと次のように定式化できる。

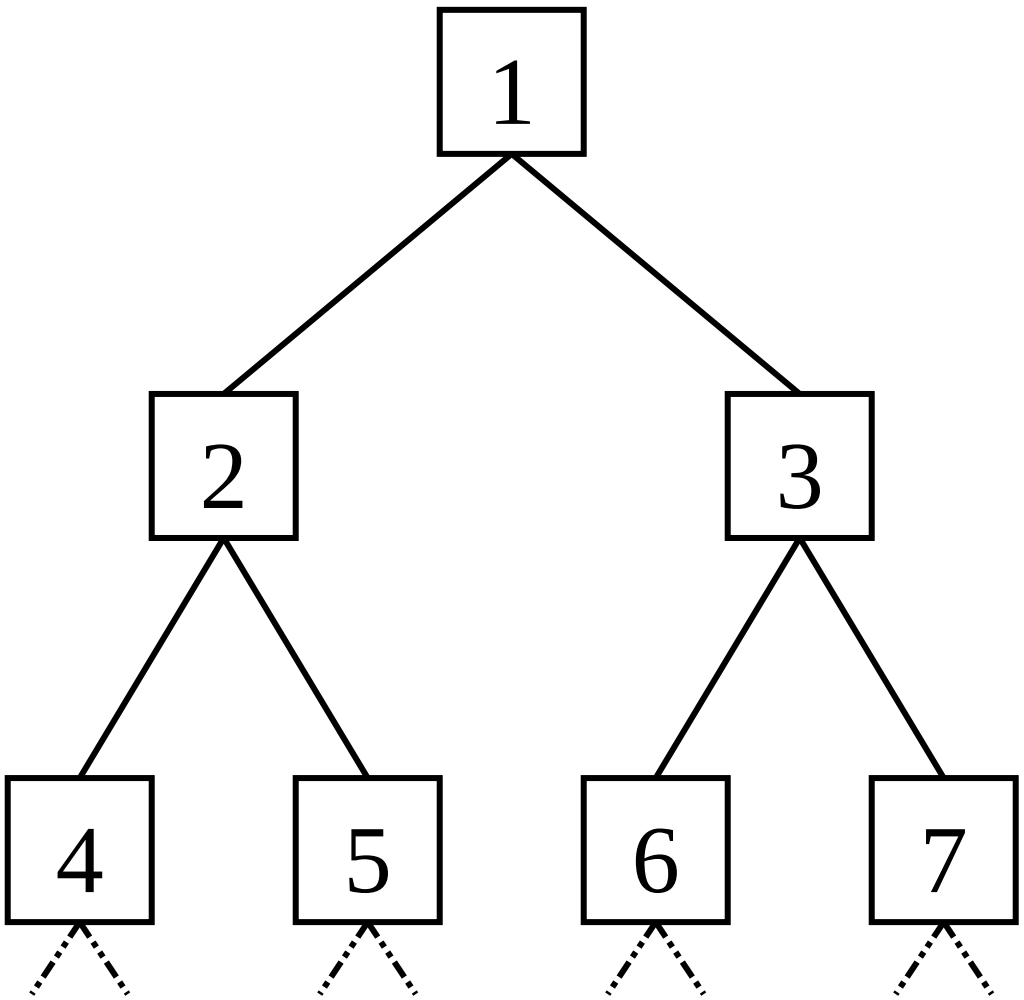
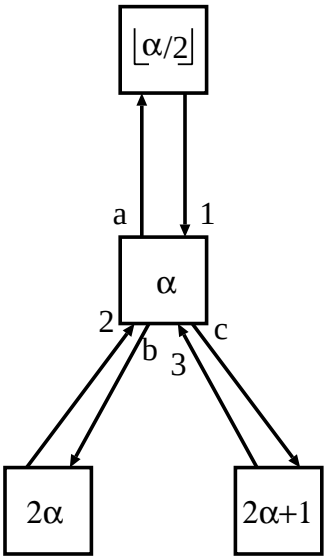


図 3.1: 完全 2 分木



$P_{in} = \{1, 2, 3\}$
$P_{out} = \{a, b, c\}$
D:データの集合
$f =< f_a, f_b, f_c >$

$G = N(N$は自然数$)$

$$u(1) = \begin{cases} b : \alpha\text{が偶数の時} \\ c : \alpha\text{が奇数の時} \end{cases} \qquad N(1) = \lfloor \alpha/2 \rfloor$$

$u(2) = a$ $\qquad N(2) = 2\alpha$
$u(3) = a$ $\qquad N(3) = 2\alpha + 1$

$R \subseteq Z$

この完全 2 分木のシストリックアレーの動作もｎ次元シストリックアレーの時と同様に連結用入力データ流から出力データ流への対応とみなせる。よって、ｎ次元シストリックアレーのように動作をループプログラムで記述してみると以下のようになる。

for t=1 to M

　for $\alpha \in R$

　　for $a \in P_{out}$

$$x^t(a,\alpha) = f_a(< x^{t-1}(u(i), \underline{N(i)}) | i \in P_{in} >)$$

但し、$\underline{N(i)} \notin R$ の時、

$$x^{t-1}(u(i), \underline{N(i)}) = d_{cin}^{t-1}(u(i), \underline{N(i)})$$

ｎ次元シストリックアレーとは下線部が違っている。以上が 2 分木に対する定式化である。さて、これをｍ分木に拡張することを次節で行う。

3.2.2　完全ｍ分木に対する定式化

ｍ分木においても完全ｍ分木であるとし、幅優先探索による番号付けをするものとする。このように番号付けすると、図 3.2 のように関係付けられる。なぜならば、ある節αに対して、それより小さい番号が付いている節にはそれぞれｍ個の子が付いている (つまり、節αの子は $m(\alpha-1)$ より大きい番号も持つ)。また、根の番号は 1 であるから、節$\alpha-1$ の一番右 (一番大きい) の子の番号は $m(\alpha-1)+1$ となる。従って、節αの一番左の子の番号は $m(\alpha-1)+2$ となる。だから、節αの一番右の子の番号は $m(\alpha-1)+2+(m-1)$ となる。逆に、これより親を導く式を考えると、$\lceil(\alpha-1)/\rceil$ となる。

この関係を用いると、ｍ分木も 2 分木同様に定式化できる。また、完全ｍ分木のシストリックアレーの動作は完全 2 分木と同じループプログラムで記述できる。

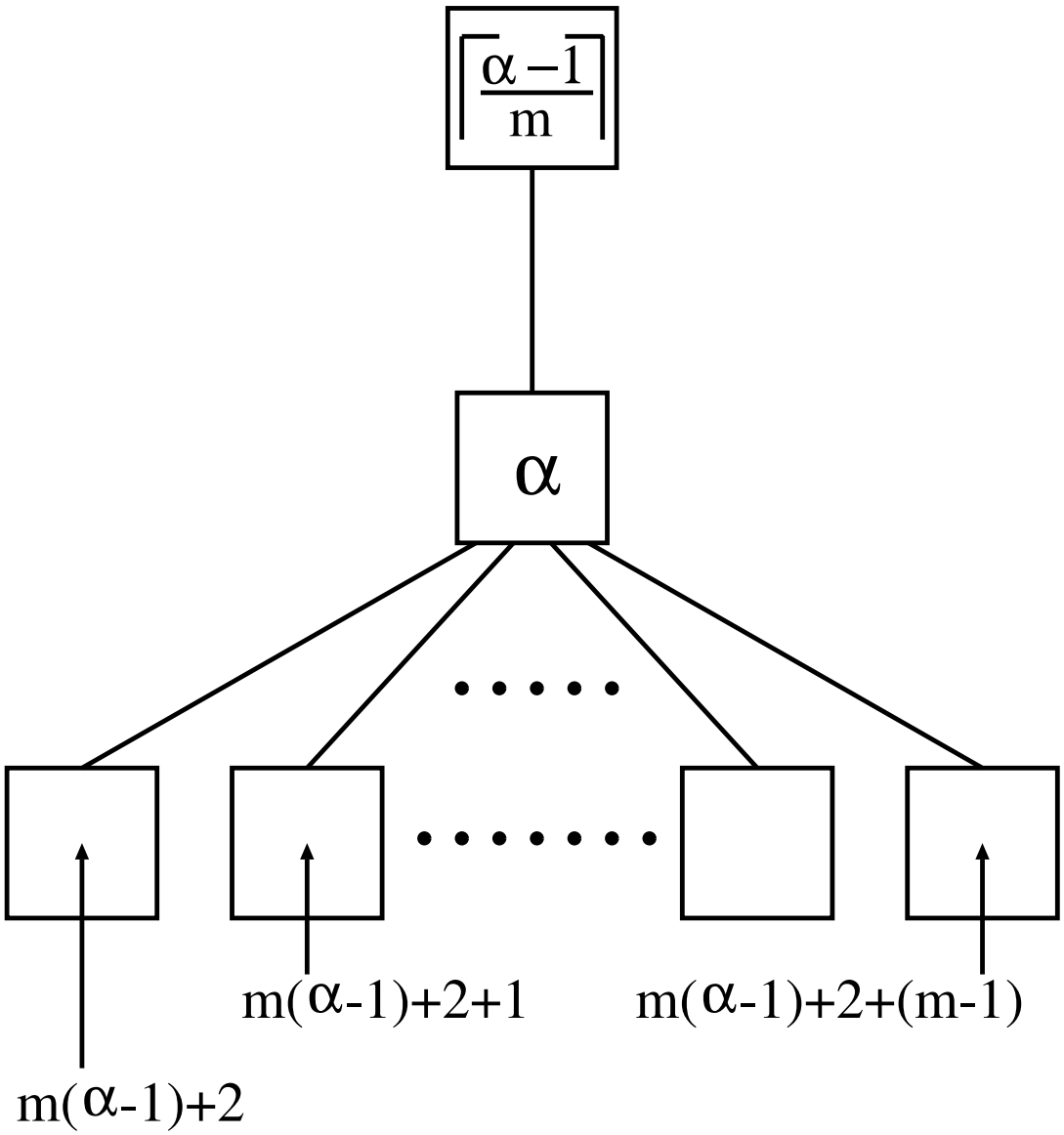
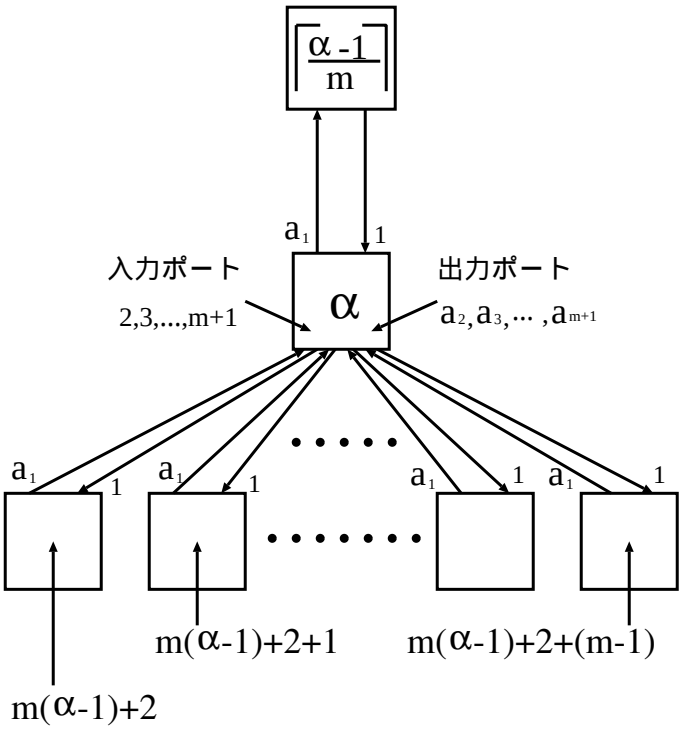


図 3.2: 完全m分木



$P_{in} = \{1, 2, \ldots, m+1\}$
$P_{out} = \{a_1, a_2, \ldots, a_{m+1}\}$
D：データの集合
$f =< f_{a_1}, f_{a_2}, \ldots, f_{a_{m+1}} >$

$G = N$（Nは自然数）

$$u(1) = \begin{cases} a_2 : \alpha \bmod m = 2 \\ a_3 : \alpha \bmod m = 3 \\ \quad : \\ a_{m+1} : \alpha \bmod m = 1 \end{cases} \qquad N(1) = \lceil (\alpha - 1)/m \rceil$$

$u(2) = a$ $\qquad N(2) = m(\alpha - 1) + 2$

:

$u(m+1) = a$ $\qquad N(m+1) = m(\alpha-1)+2+m-1$

$$R \subseteq Z$$

3.3　ハイパーキューブの定式化

次にハイパーキューブの定式化を行う。通常ハイパーキューブと呼ばれているものは、2 進 D キューブ HC(2,D) であり 図 3.3のように一般に 1 つの次元に 2 つのセルを持ち、2 つの HC(2,D-1) から 1 つの HC(2,D) が構成される。セルの数は $N = 2^D$個であり、各セルのアドレス a は D ビットの 2 進数 $(a_{D-1}...a_i...a_0)$ で表される $(a_i \in \{0,1\}, 0 \leq i \leq D-1, 0 \leq a \leq N-1)$ 。まずは、例として $D = 4$ の場合を考えてみる。

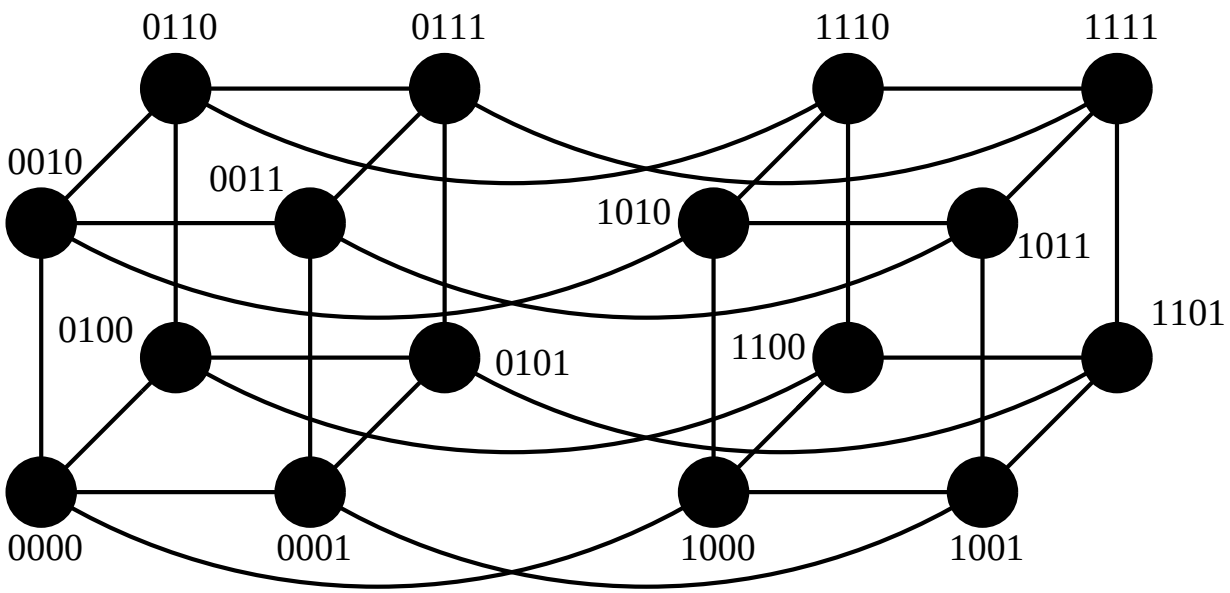
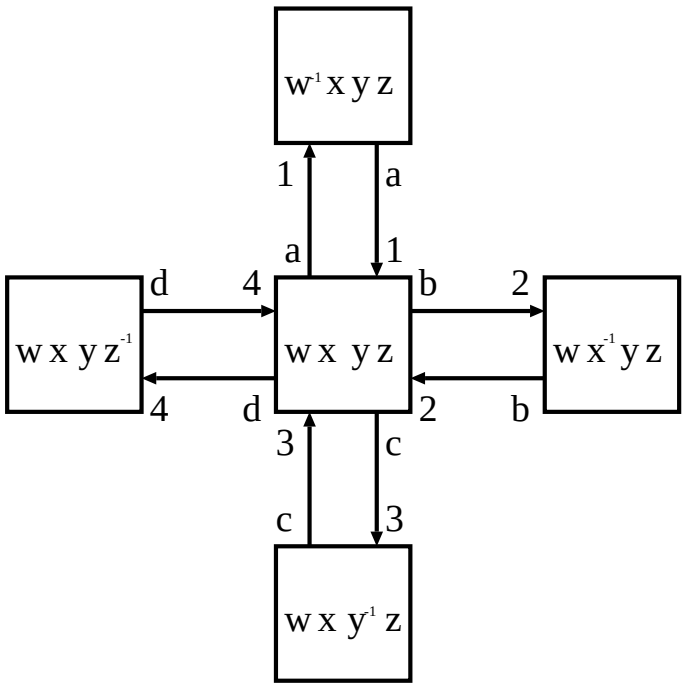


図 3.3: ハイパーキューブ

上の図のようにアドレスを決めると次ページのように定式化できる。



x^{-1} とは x が 0 ならば 1、 1 ならば 0 の事を示す

$P_{in} = \{1, 2, 3, 4\}$
$P_{out} = \{a, b, c, d\}$
D:データの集合
$f =< f_a, f_b, f_c, f_d >$

$G = B^4$ (Bはブール代数)

$u(1) = a$　　$N(1) = (1000)$
$u(2) = b$　　$N(2) = (0100)$
$u(3) = c$　　$N(3) = (0010)$
$u(4) = d$　　$N(4) = (0001)$

$R \subseteq Z$

次に $D = n$ $(HC(2, n))$ の場合を考えてみると、以下のようになる。

$P_{in} = \{1, 2, \ldots, n\}$
$P_{out} = \{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$
D:データの集合
$f = < f_{a_1}, f_{a_2}, \ldots, f_{a_n} >$

$G = B^n$ (Bはブール代数)

$u(1) = a_1$　　$N(1) = (100\ldots0)$
$u(2) = a_2$　　$N(2) = (010\ldots0)$
$\vdots$　　$\vdots$
$u(m) = a_m$　　$N(m) = (000\ldots1\ldots0)$ (m番目が 1)
$0 \leq m \leq n$
$\vdots$　　$\vdots$
$u(n) = a_n$　　$N(n) = (000\ldots1)$

$R \subseteq Z$

ハイパーキューブの動作も n 次元シストリックアレーの時と同じように連結用入力データ流から出力データ流への対応とみなせる。従って n 次元シストリックアレーのように動作をループプログラムで記述することができる。

for t=1 to M

for $\alpha \in R$

for $a \in P_{out}$

$x^t(a, \alpha) = f_a(< x^{t-1}(u(i), \underline{\alpha \oplus N(i)}) | i \in P_{in} >)$

但し、$\underline{\alpha \oplus N(i)} \notin R$ の時、

$x^{t-1}(u(i), \underline{\alpha \oplus N(i)}) = d_{cin}^{t-1}(u(i), \underline{\alpha \oplus N(i)})$

($\oplus$は排他的論理和)

3.4　ＣＣＣの定式化

最後にＣＣＣの定式化を行う。ＣＣＣとはハイパーキューブとリング (サイクル) を組み合わせたものである。Ｄ次元のセル数 Nは一般的に $D \times 2^D$である。D次元ハイパーキューブの各セルの次数は Dであるが、ＣＣＣではこのセルを D個以上のセルのリングで置き換えるため次数は最大で 3 となる。ＣＣＣでも始めに 3 次元ＣＣＣから考えてみる。まずその形を見てみると、図 3.4のようになる。

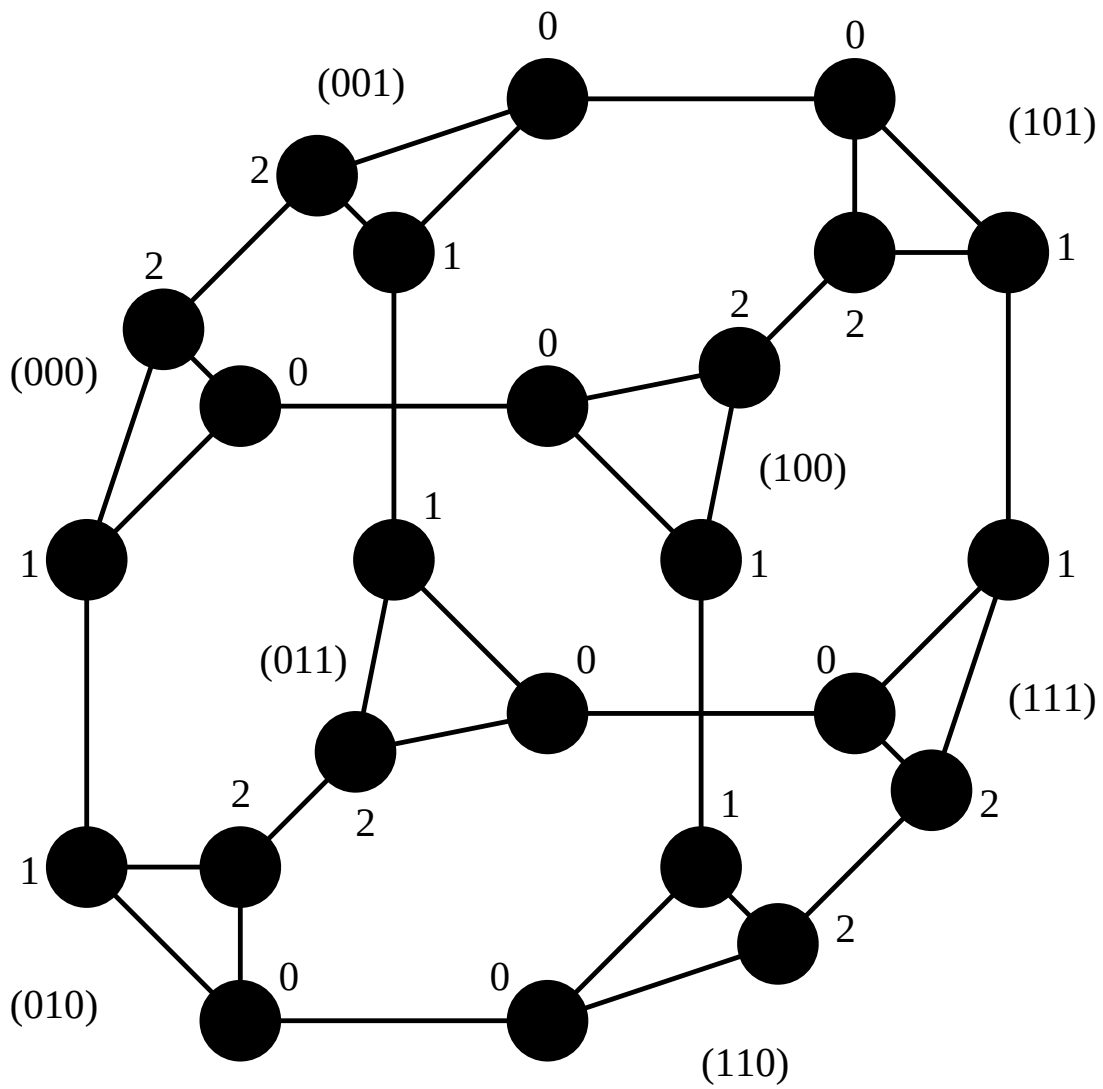
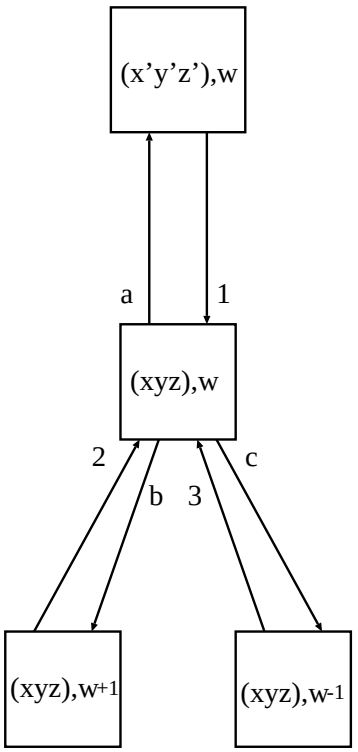


図 3.4: ＣＣＣ

また、このようにアドレスを決めると次ページのように定式化できる。



$P_{in} = \{1, 2, 3\}$
$P_{out} = \{a, b, c\}$
D:**データの集合**
$f =< f_a, f_b, f_c >$

$G = B^3 \times Z_3$

$$u(1) = a \qquad N(1) = \begin{cases} ((100), 0) & \text{w=0 の時} \\ ((010), 0) & \text{w=1 の時} \\ ((001), 0) & \text{w=2 の時} \end{cases}$$
$$u(2) = c \qquad N(2) = ((000), 1)$$
$$u(3) = b \qquad N(3) = ((000), -1)$$

$R \subseteq Z$

次に n 次元の場合を考えると、以下のようになる。

$P_{in} = \{1, 2, \ldots, n\}$
$P_{out} = \{a, b, c\}$
D:データの集合
$f =< f_a, f_b, f_c >$

$G = B^n \times Z_n$

$$u(1) = a \qquad N(1) = \begin{cases} ((100\ldots0), 0) & \text{w=0 の時} \\ ((010\ldots0), 0) & \text{w=1 の時} \\ \quad : & \quad : \\ ((000\ldots0\underline{1}0\ldots0), 0) & \text{w=m の時} \\ \text{下線部は } m+1 \text{ 番目} & 0 \le m \le n-1 \\ \quad : & \quad : \\ ((000\ldots1), 0) & \text{w=n-1 の時} \end{cases}$$

$u(2) = c \qquad N(2) = ((000\ldots0), 1)$
$u(3) = b \qquad N(3) = ((000\ldots0), -1)$

$R \subseteq Z$

今までと同様に動作をループプログラムで記述してみると下のようになる。

for t=1 to M

　for $\alpha \in R$

　　for $a \in P_{out}$

　　$x^t(a, \alpha) = f_a(< x^{t-1}(u(i), \underline{\alpha * N(i)}) | i \in P_{in} >)$

但し、$\underline{\alpha * N(i)} \notin R$ の時、

$x^{t-1}(u(i), \underline{\alpha * N(i)}) = d_{cin}^{t-1}(u(i), \underline{\alpha * N(i)})$

（$*$はアドレスの前半部には排他的論理和として
後半部には足し算として機能する演算とする）

第 4 章

まとめ

本研究ではｎ次元シストリックアレーの自動設計法において前段階として行われている定式化というものを対象となるトポロジに対し行った。

具体的には完全m分木、ハイパーキューブ、ＣＣＣに対する定式化をそれぞれ行って、それらに対する動作を記述するループプログラムをｎ次元シストリックアレーと同様にしてそれぞれ導き出した。

今後の課題はトポロジの動作を示すループプログラムとそれに対応するであろうプログラムから類似性を見つけ出し、プログラムをそのトポロジの動作を示すループプログラムの形で表現するために必要となる条件を見つけることである。また長期的にはそれぞれのトポロジに対する自動設計法を導き出すことである。

謝辞

本研究を進めるにあたり、全面的に御指導をいただいた東北大学工学部 阿曽弘具教授に心から感謝いたします。

また、日頃から数多くの御指導、御助言をいただいた東北大学工学部 大町真一郎助手、黒岩丈介助手に深く感謝いたします。

最後に、さまざまな御意見、御助言をいただいた、東北大学阿曽研究室の諸先輩方、ならびに、共に励まし合いながら研究活動を行った同研究室の同輩達に感謝いたします。

参考文献

[1] 阿曽弘具:“シストリックアレーの自動設計法”, 信学論 (D), Vol.J71-D No.8 pp.1487-1495 1988/8

[2] 阿曽弘具、稲垣康善: “シストリックアルゴリズムの定式化と情報の流れ”, 信学論 (D),Vol.J70-D No.6 pp.1074-1082 1987/6

[3] 三浦大祐、阿曽弘具、稲垣康善: “多重ループプログラムを処理するシストリックアルゴリズムの構成法”, 信学論 (D) Vol.J70-D No.3 pp.515-524 1987/3